



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

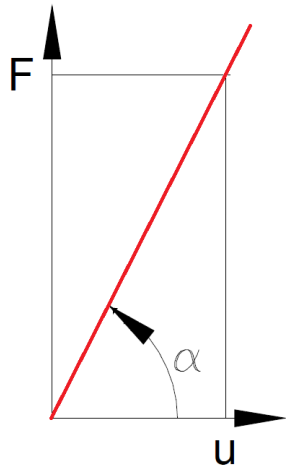


Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 6. Zagadnienia nieliniowe

04.2026L

LINIOWY MODEL MES ZACHOWANIA STRUKTURY ODKSZTAŁCALNEJ



$$[K]\{q\} = \{F\} \Rightarrow \{q\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Jeśli obciążenie da się rozłożyć na składowe:

$$\{F_*\} = \alpha\{F_a\} + \beta\{F_b\}$$

to można użyć metodę superpozycji:

$$\{q_*\} = [K]^{-1}\{F_*\}, \Rightarrow \{q_*\} = [K]^{-1}(\alpha\{F_a\} + \beta\{F_b\}) = \alpha[K]^{-1}\{F_a\} + \beta[K]^{-1}\{F_b\}$$

i wtedy rozwiązanie końcowe jest sumą rozwiązań składowych:

$$\{q_*\} = \alpha\{q_a\} + \beta\{q_b\}$$

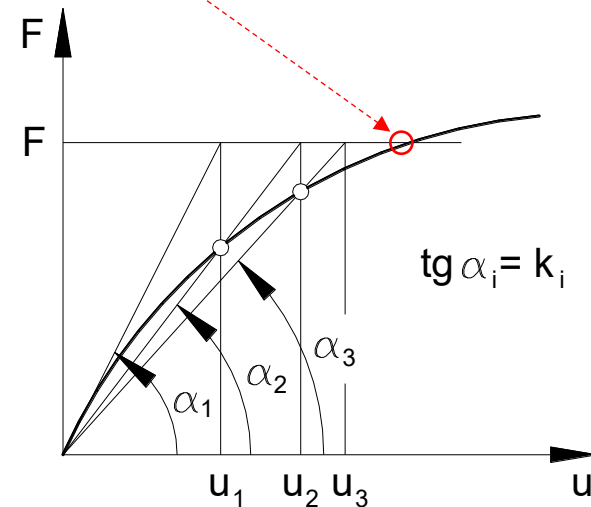
Nieliniowości strukturalne powodują, że odpowiedź konstrukcji zmienia się nieproporcjonalnie do przyłożonych sił. Realistycznie rzecz biorąc, prawie wszystkie konstrukcje są nieliniowe z natury, ale nie zawsze w takim stopniu, że nieliniowości te mają znaczący wpływ na analizę.

NIELINIOWY MODEL MES ZACHOWANIA STRUKTURY ODKSZTAŁCALNEJ

W analizie nieliniowej **macierz sztywności konstrukcji** i **wektor obciążenia** mogą zależeć od rozwiązania i dlatego są nieznane.

Aby rozwiązać problem, program używa procedury iteracyjnej, w której szereg przybliżeń liniowych zbiega się do **rzeczywistego rozwiązania nieliniowego**.

$$[K(\{q\})]\{q\} = \{F(\{q\})\}$$



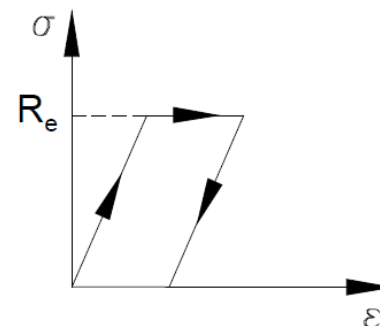
- Czy rozwiązanie istnieje? Ile rozwiązań istnieje?
- Rozwiązanie czasochłonne
- Iteracyjny proces rozwiązania – problem konwergencji
- Wyniki obciążenia zależą od historii obciążenia

Przyczyny zachowania nieliniowego

Nieliniowości materiałowe - nieliniowe zależności σ - ϵ

Czynniki mogące wpływać na właściwości σ - ϵ materiału:

- historia obciążenia (jak w przypadku odpowiedzi sprężysto-plastycznej),
- warunki środowiskowe (np. temperatura)
- czas w którym obciążenie działa (jak w przypadku pełzania).



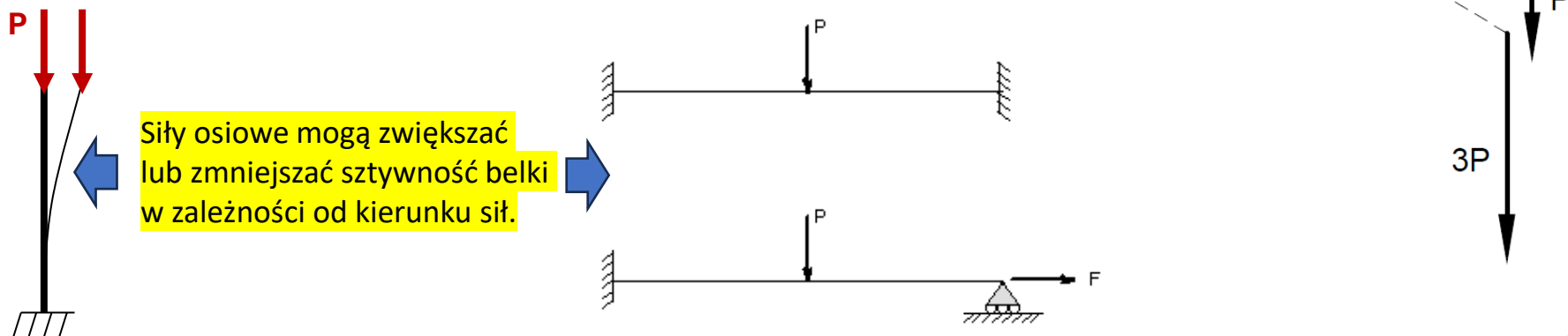
prosty sprężysto-plastyczny model zachowania się materiału

Nieliniowości geometryczne

Jeśli struktura doświadcza dużych odkształceń, jej zmieniająca się konfiguracja geometryczna może spowodować, że struktura zareaguje nieliniowo.

Pod obciążeniami poprzecznymi belka jest bardzo elastyczna.

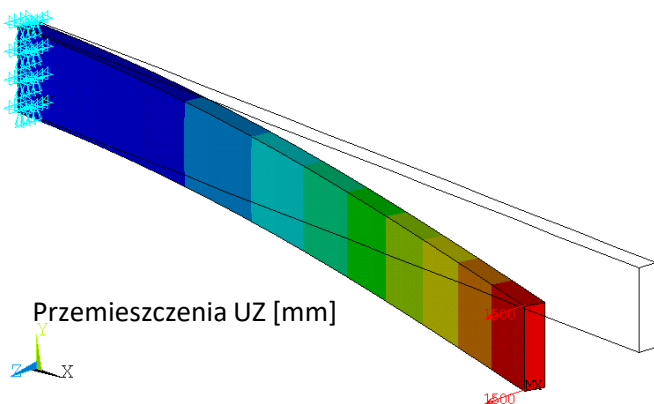
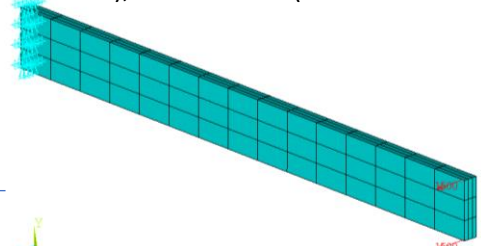
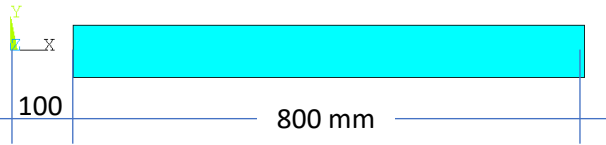
W miarę wzrostu siły P pręt ugina się tak bardzo, że ramię momentu zmniejsza się zauważalnie, powodując wzrost sztywności przy większych obciążeniach.



Nieliniowości materiałowe

Przykład 1 – duralowy płaskownik (A=20x80 mm²), R₀₂=280MPa (bez umocnienia)

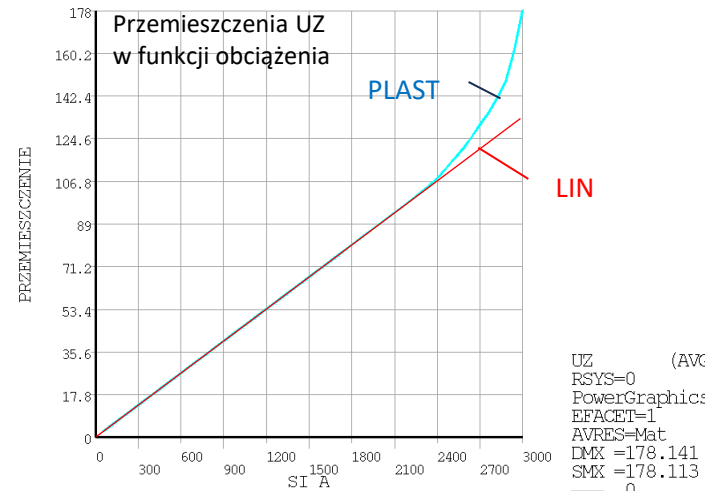
Obciążony siłą (FZ=3000 N)



UZ (AVG)
 RSYS=0
 PowerGraphics
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 DMX =134.082
 SMX =134.059

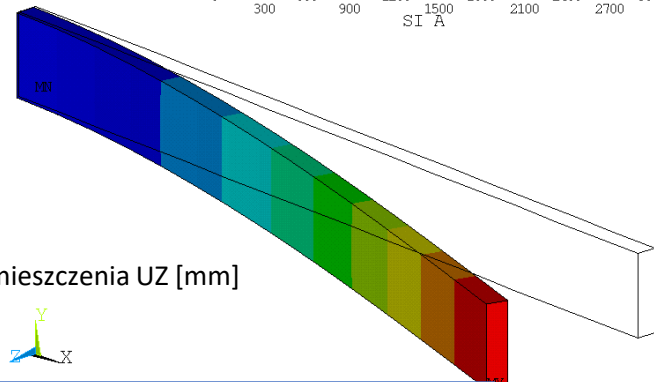
U

0
14.8954
29.7908
44.6862
59.5816
74.477
89.3724
104.268
119.163
134.059



UZ (AVG)
 RSYS=0
 PowerGraphics
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 DMX =178.141
 SMX =178.113

0
19.7903
39.5807
59.371
79.1613
98.9516
118.742
138.532
158.323
178.113



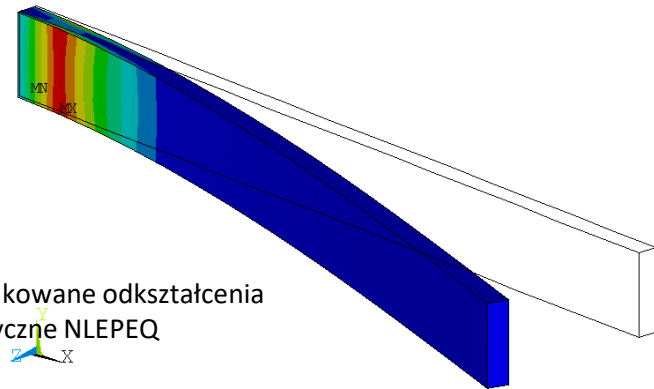
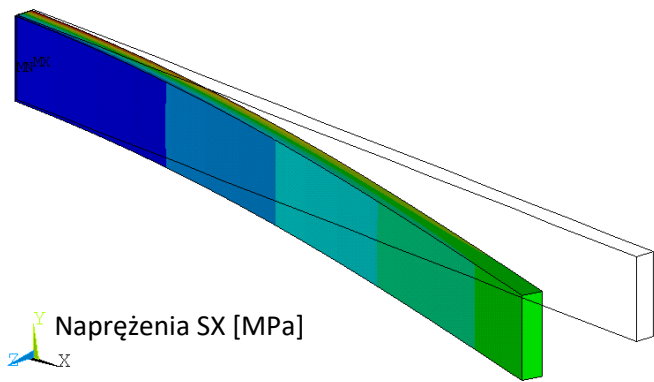
ANALIZA NIELINIOWA MATERIAŁOWO

DMX =134.082
 SMN =-428.113
 SMX =428.113

-428.113
-332.977
-237.84
-142.704
-47.568
47.5681
142.704
237.84
332.977
428.113

AVRES=Mat
 DMX =178.141
 SMX =.006267

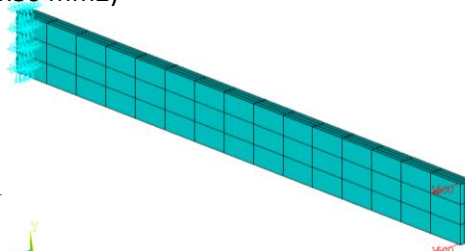
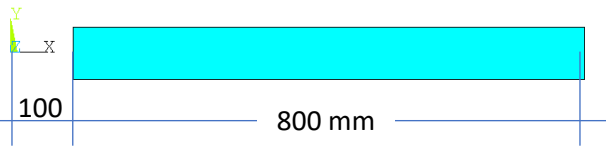
0
.696E-03
.001393
.002089
.002785
.003482
.004178
.004874
.005571
.006267



Nieliniowości geometryczne

Przykład 2 – duralowy płaskownik (A=20x80 mm²)

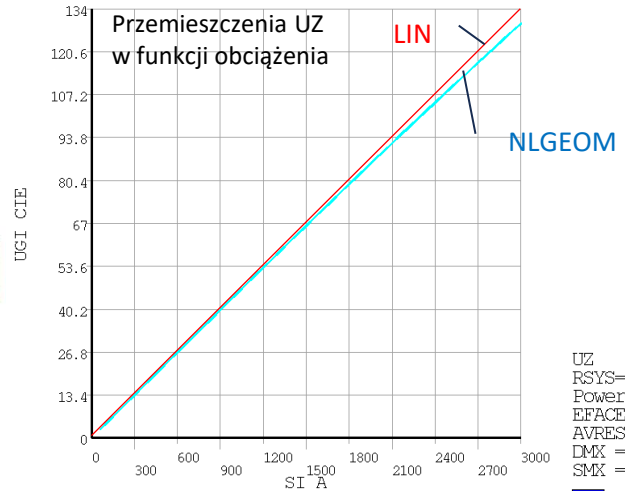
Obciążony siłą (FZ=3000 N)



UZ (AVG)
 RSYS=0
 PowerGraphics
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 DMX =134.082
 SMX =134.059

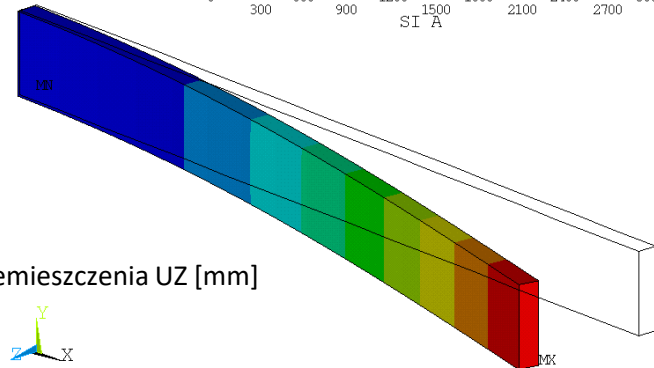
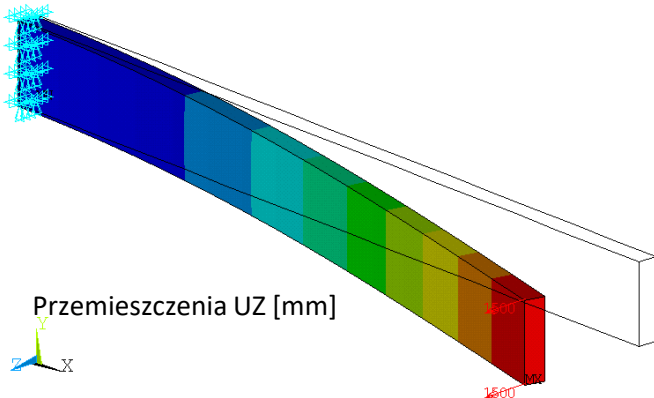
U

0
14.8954
29.7908
44.6862
59.5816
74.477
89.3724
104.268
119.163
134.059



UZ (AVG)
 RSYS=0
 PowerGraphics
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 DMX =130.078
 SMX =129.67

0
14.4077
28.8155
43.2232
57.631
72.0387
86.4465
100.854
115.262
129.67



ANALIZA LINIOWA

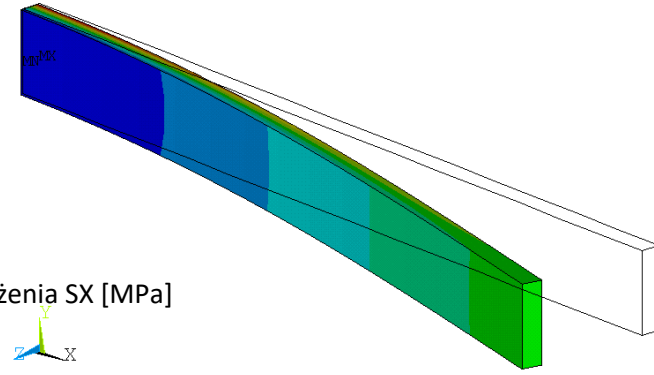
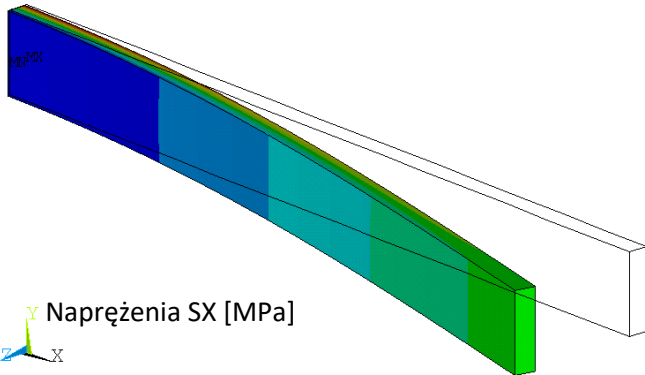
ANALIZA GEOMETRYCZNIE NIELINIOWA

DMX =134.082
 SMN =-428.113
 SMX =428.113

-428.113
-332.977
-237.84
-142.704
-47.568
47.5681
142.704
237.84
332.977
428.113

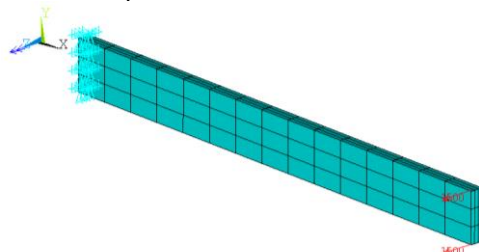
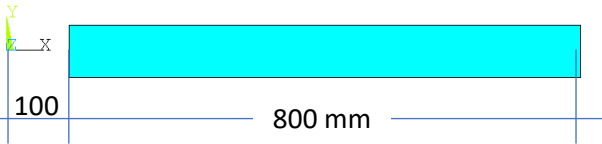
DMX =130.078
 SMN =-421.642
 SMX =417.705

-421.642
-328.381
-235.12
-141.859
-48.5986
44.6622
137.923
231.184
324.445
417.705



Nieliniowości geometryczne

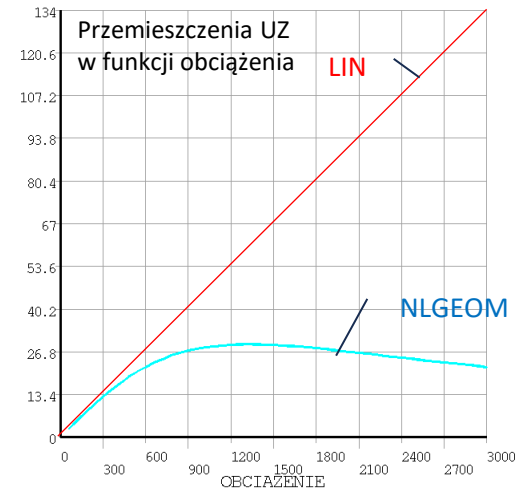
Przykład 3 – duralowy płaskownik (A=20x80 mm²)
 wirujący względem osi Z (n=3000 obr./min)
 i obciążony siłą (FZ=3000 N)



smiglo duralowe (n=3000 obr./min i FZ=3000N Niel geom)

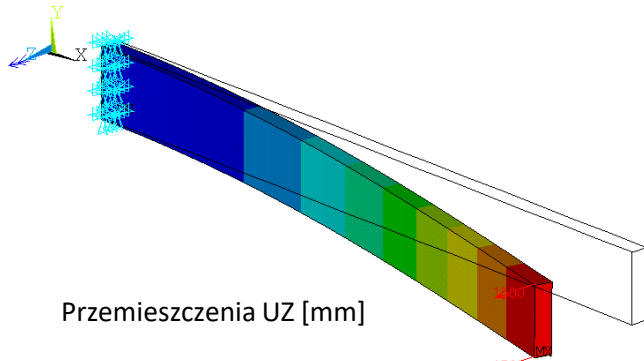
DMX =134.098
 SMX =134.058
 U
 F
 OMEG

0
14.8954
29.7907
44.6861
59.5815
74.4769
89.3722
104.268
119.163
134.058



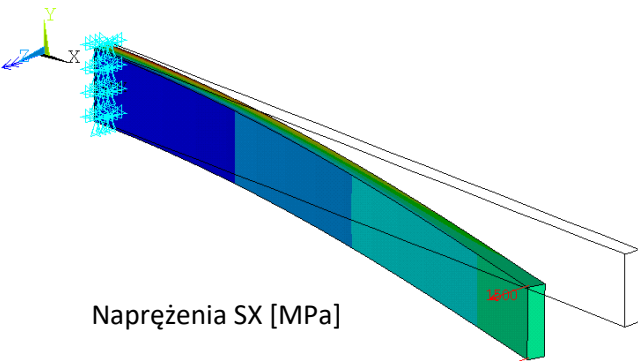
TIME=3000
 UZ (AVG)
 RSYS=0
 PowerGraphics
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 DMX =22.1169
 SMX =22.0984

0
2.45537
4.91075
7.36612
9.82149
12.2769
14.7322
17.1876
19.643
22.0984



smiglo duralowe (n=3000 obr./min i FZ=3000N LINIOWE)

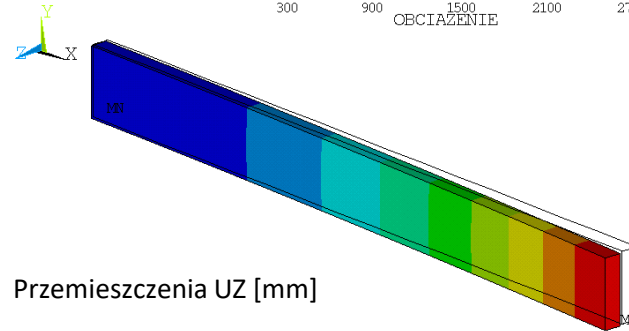
ANALIZA LINIOWA



smiglo duralowe (n=3000 obr./min i FZ=3000N LINIOWE)

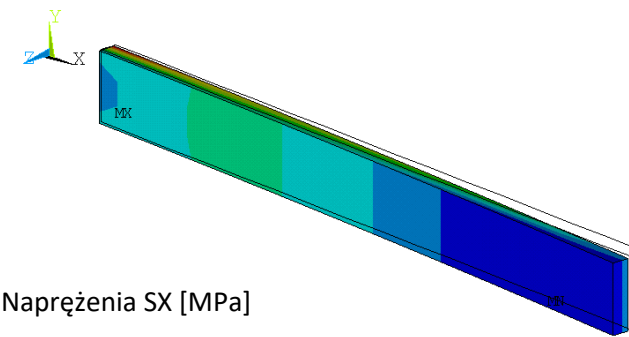
PowerGraphics
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 DMX =134.098
 SMN =-320.076
 SMX =536.149
 U
 F
 OMEG

-320.076
-224.94
-129.804
-34.6679
60.4683
155.604
250.741
345.877
441.013
536.149



smiglo duralowe (n=3000 obr./min i FZ=3000N Niel geom)

ANALIZA GEOMETRYCZNIE NIELINIOWA



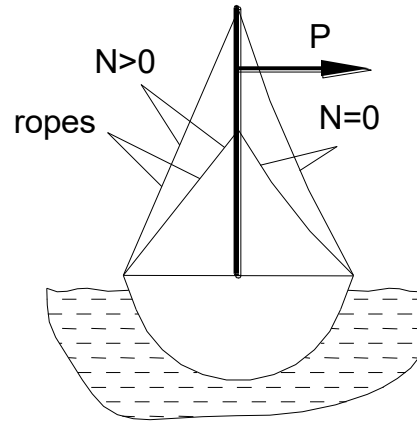
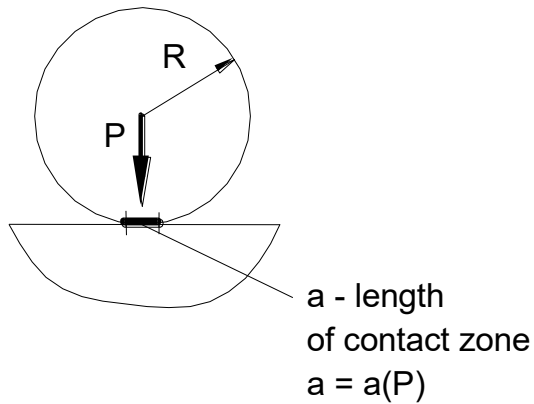
smiglo duralowe (n=3000 obr./min i FZ=3000N Niel geom)

EFACET=1⁺
 AVRES=Mat
 DMX =22.1169
 SMN =-13.9112
 SMX =193.588

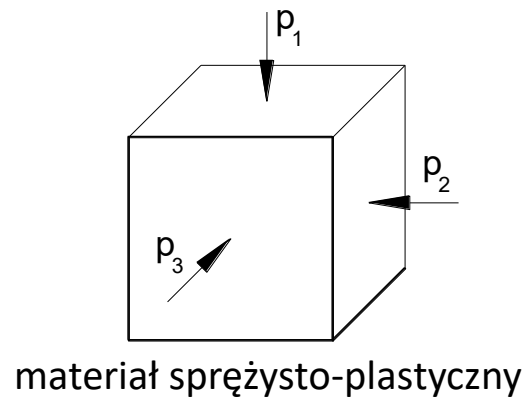
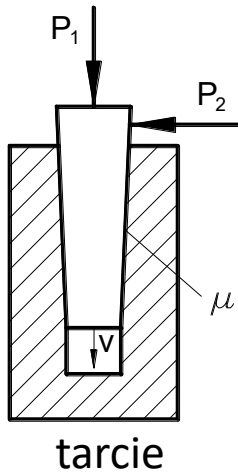
-13.9112
9.14428
32.1997
55.2551
78.3106
101.366
124.421
147.477
170.532
193.588

Przyczyny zachowania nieliniowego (c.d.)

Tarcie, oddziaływanie kontaktowe, przerwy (gaps), liny



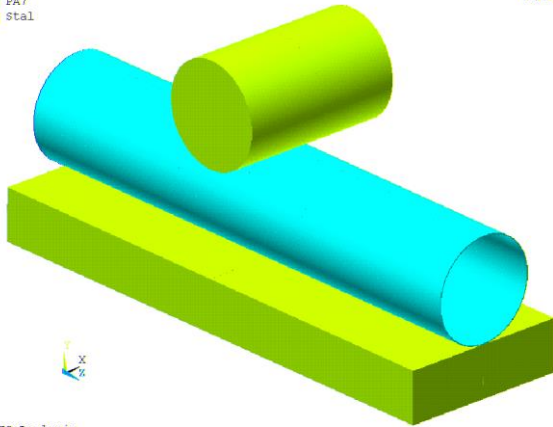
Znaczenie historii obciążenia dla wyniku końcowego obciążenia



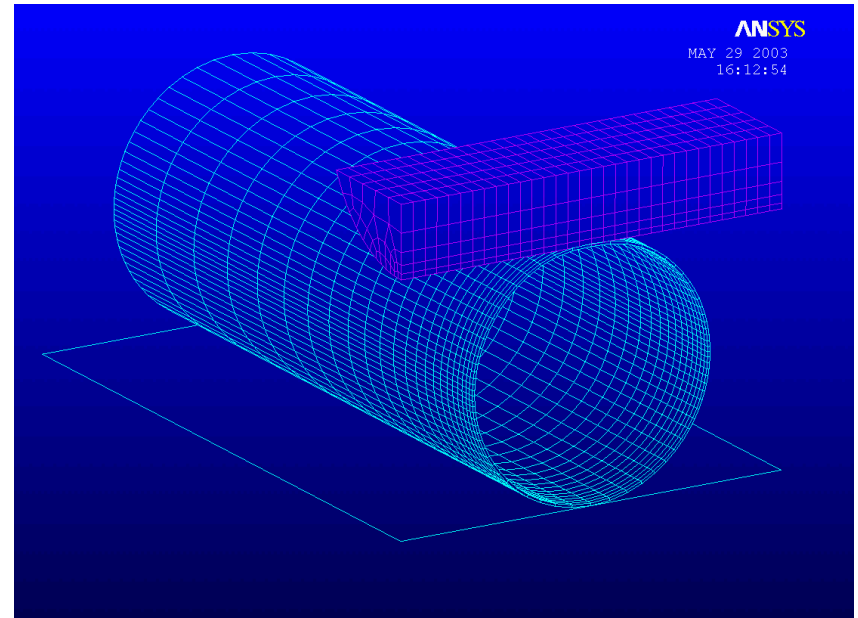
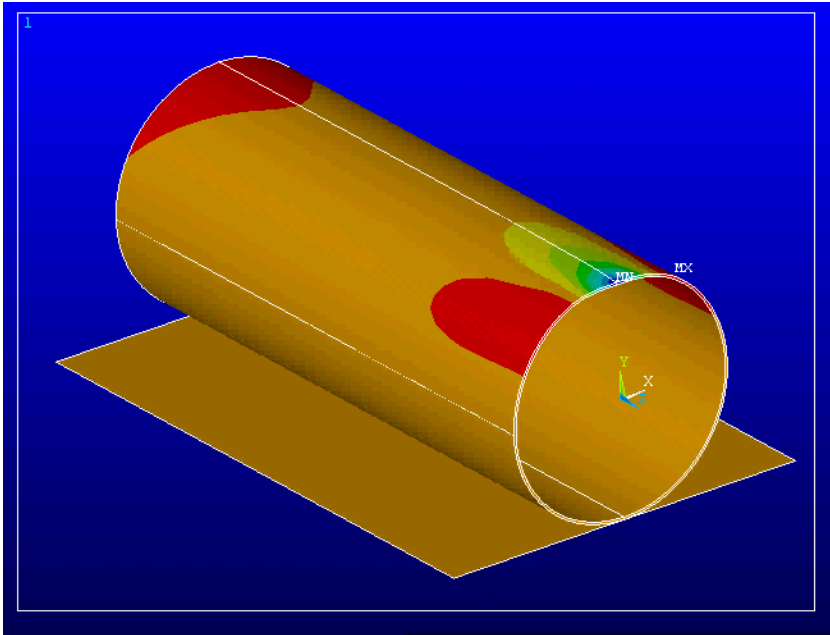
Test 1: zderzenie walca z rurą

PA7
Stal

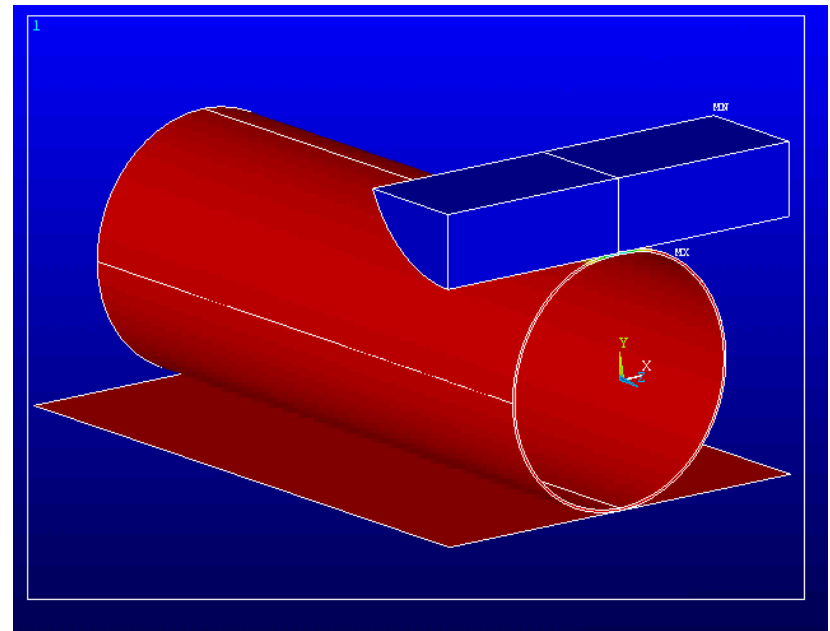
ANSYS



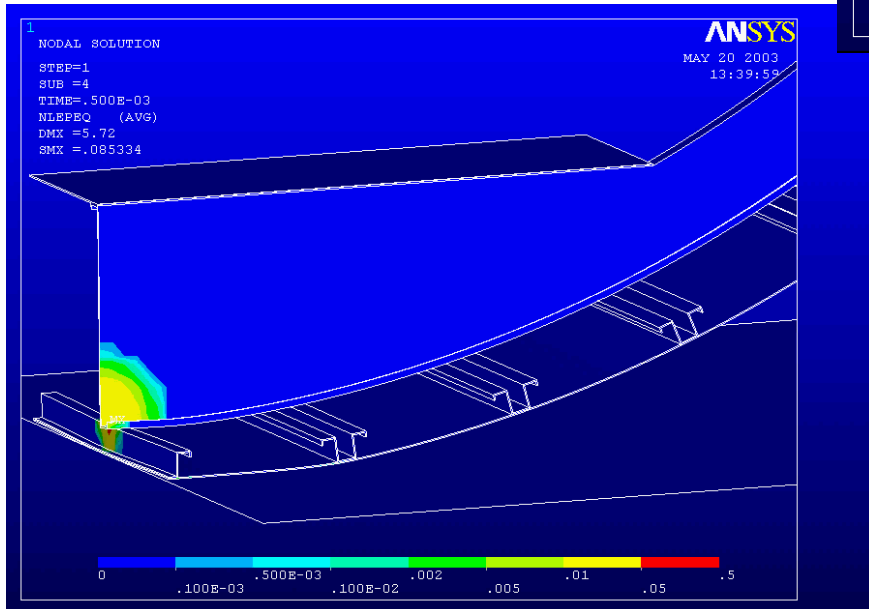
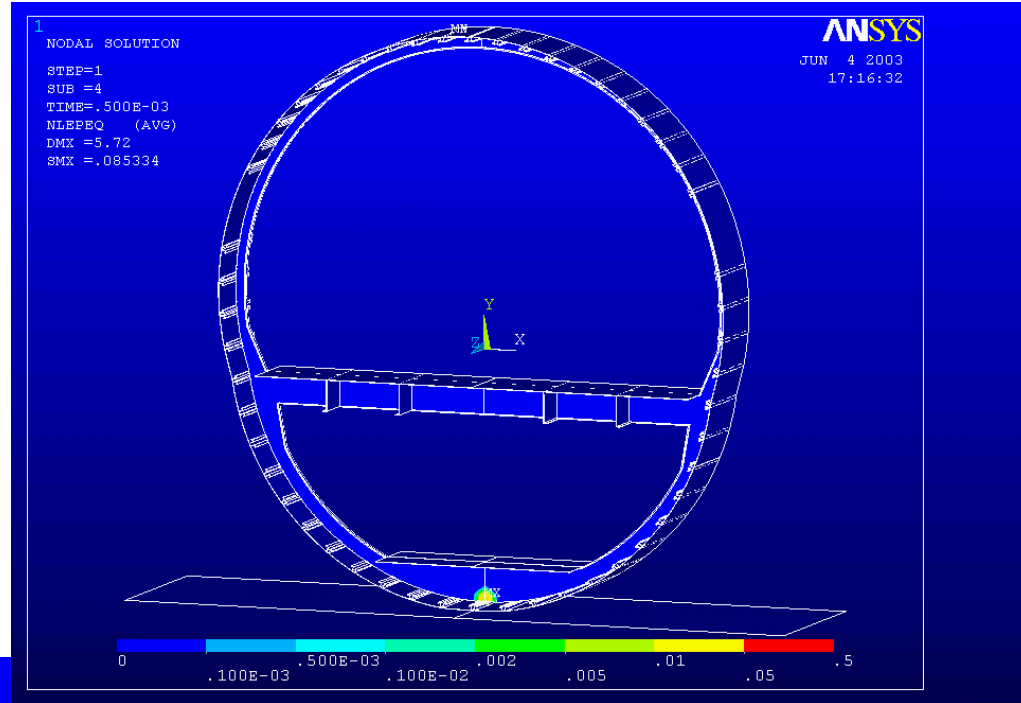
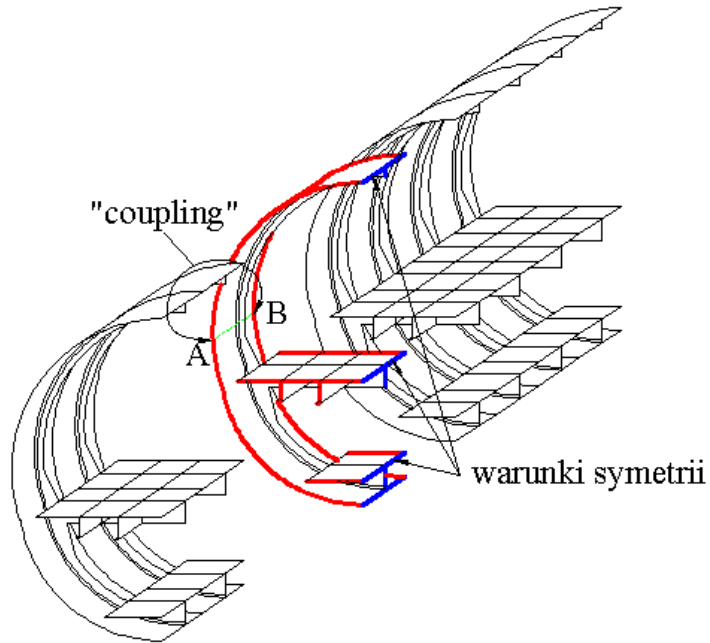
Zgniatanie quasistatyczne:



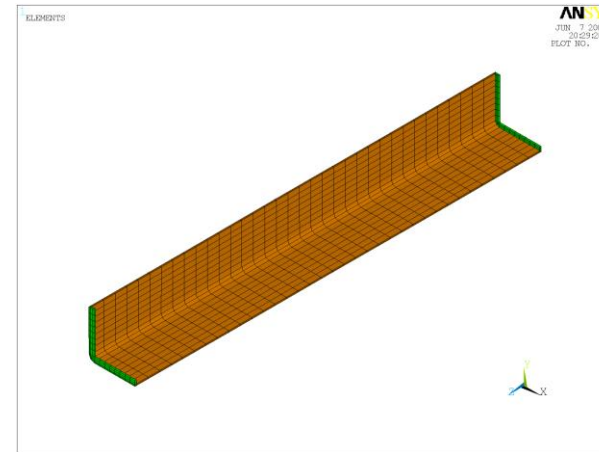
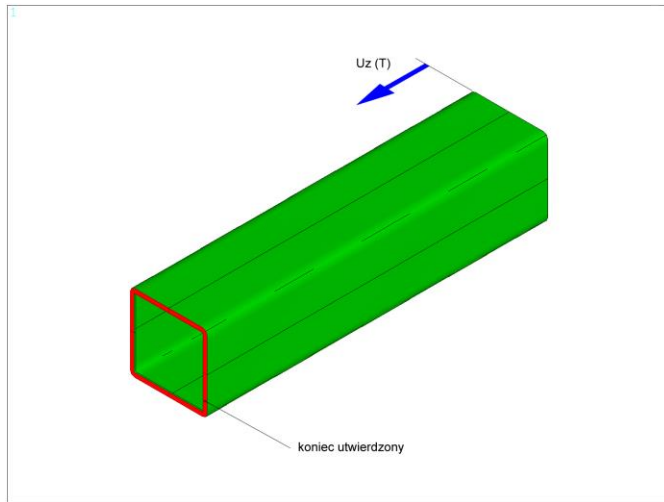
Zderzenie (pełna dynamika)



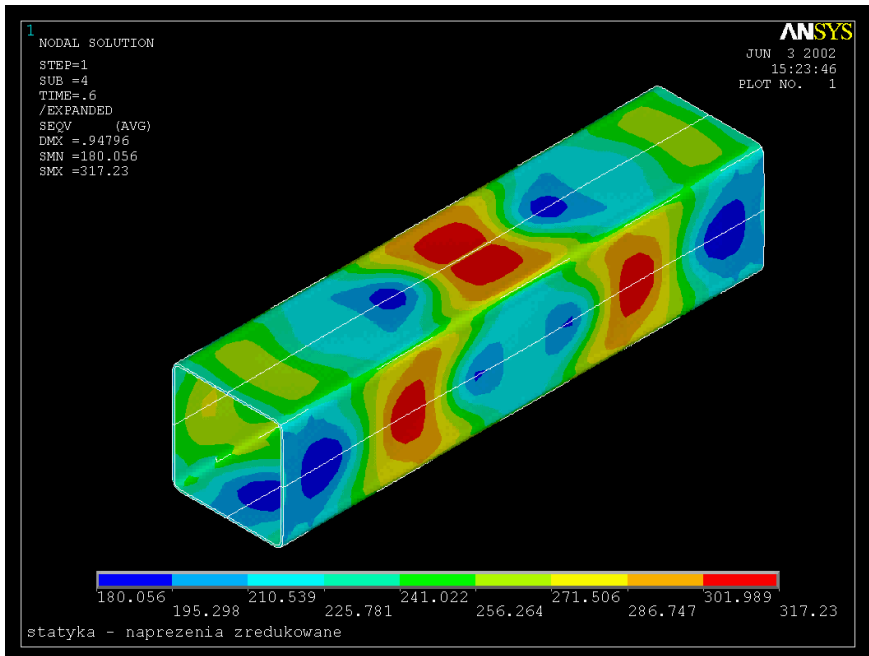
Test 2. Zderzenie sekcji kadłuba samolotu Boeing 737-200



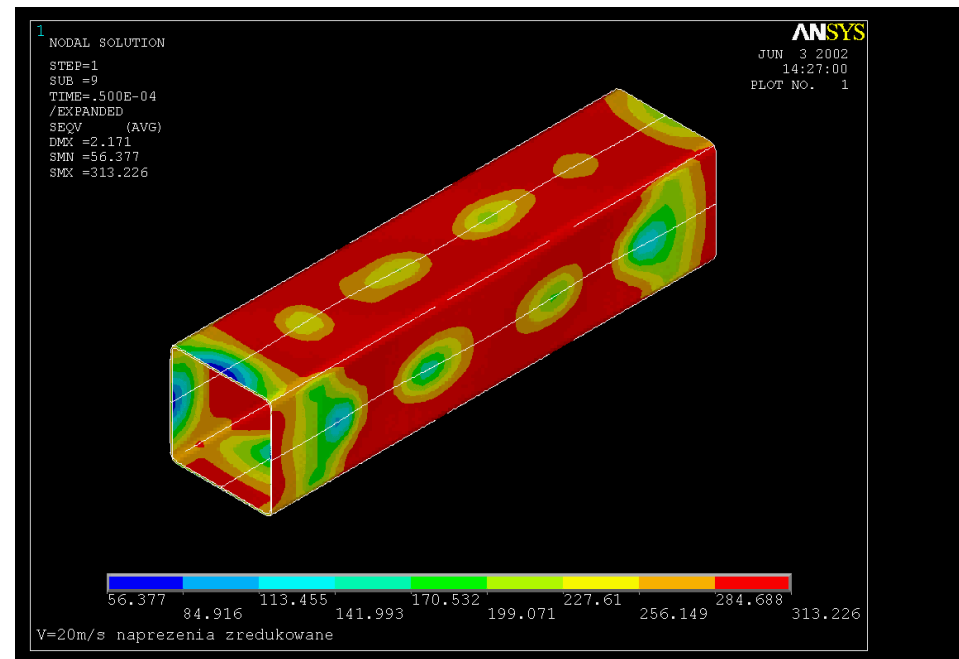
Test 3. Analiza utraty stateczności ściskanego osiowo elementu cienkościennego o przekroju zamkniętym



Model MES



1) Analiza pod obciążeniem statycznym zmiennym w czasie, zadanym przemieszczeniowo



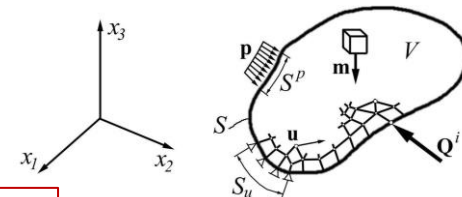
2) Analiza dynamiczna, po uderzeniu nieskończenie dużą masą o ustalonej prędkości (nieskończenie duża energia uderzenia).

Opis ciała odkształcalnego o nieliniowych właściwościach

Wektory składowych stanu odkształcenia i naprężenia

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13}],$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}].$$



Związki kinematyczne pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami otrzymuje się przez analizę zmian wymiarów elementarnego fragmentu ciała, a następnie uzyskane wyrażenie rozwija się w szereg Taylora:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{\alpha,i}u_{\alpha,j}), \quad \text{gdzie indeksy po przecinkach oznaczają różniczkowanie po składowych } i, j, \alpha = 1, 2, 3.$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(u_{1,1})^2 + \frac{1}{2}(u_{2,1})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,1})^2 \\ \frac{1}{2}(u_{1,2})^2 + \frac{1}{2}(u_{2,2})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,2})^2 \\ \frac{1}{2}(u_{1,3})^2 + \frac{1}{2}(u_{2,3})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,3})^2 \\ u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2} \\ u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3} \\ u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0 \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_1(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \boldsymbol{\varepsilon}^L + \boldsymbol{\varepsilon}^{NL},$$

gdzie pochodne macierzy funkcji kształtu:

$$\mathbf{N}_{i,j}^T = \left[\frac{\partial n_{i1}}{\partial x_j}, \frac{\partial n_{i2}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial n_{iL}}{\partial x_j} \right]$$

$$\mathbf{N}_{,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_{11}}{\partial x_j} & \frac{\partial n_{12}}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial n_{1L}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial n_{12}}{\partial x_j} & \frac{\partial n_{22}}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial n_{2L}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial n_{13}}{\partial x_j} & \frac{\partial n_{23}}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial n_{3L}}{\partial x_j} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{1,1}^T \\ \mathbf{N}_{2,2}^T \\ \mathbf{N}_{3,3}^T \\ \mathbf{N}_{1,2}^T + \mathbf{N}_{2,1}^T \\ \mathbf{N}_{2,3}^T + \mathbf{N}_{3,2}^T \\ \mathbf{N}_{1,3}^T + \mathbf{N}_{3,1}^T \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{N}_{,1}^T \mathbf{N}_{,1} \\ \mathbf{q}^T \mathbf{N}_{,2}^T \mathbf{N}_{,2} \\ \mathbf{q}^T \mathbf{N}_{,3}^T \mathbf{N}_{,3} \\ \mathbf{q}^T (\mathbf{N}_{,1}^T \mathbf{N}_{,2} + \mathbf{N}_{,2}^T \mathbf{N}_{,1}) \\ \mathbf{q}^T (\mathbf{N}_{,2}^T \mathbf{N}_{,3} + \mathbf{N}_{,3}^T \mathbf{N}_{,2}) \\ \mathbf{q}^T (\mathbf{N}_{,1}^T \mathbf{N}_{,3} + \mathbf{N}_{,3}^T \mathbf{N}_{,1}) \end{Bmatrix},$$

Liniowa składowa odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ jest iloczynem macierzy \mathbf{B}_0 i wektora parametrów węzłowych \mathbf{q} .
Macierz \mathbf{B}_0 zależy wyłącznie od funkcji kształtu.

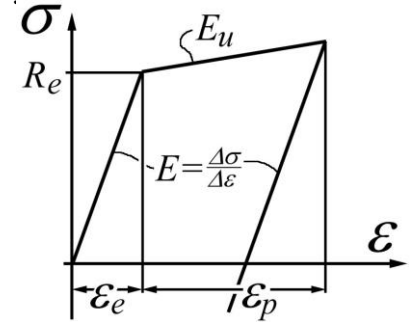
Nieliniowa składowa odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}$ jest iloczynem macierzy \mathbf{B}_1 i wektora parametrów węzłowych \mathbf{q} .

Nieliniowość wywołana plastycznością

Zależność pomiędzy składowymi wektora składowych stanu naprężenia σ , a składowymi wektora odkształcenia sprężystego ε_e można zapisać na podstawie prawa Hooke'a przy pomocy macierzy konstytutywnej \mathbf{D} , która zawiera właściwości sprężyste materiału (E i ν):

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon_e.$$

Zależność $\sigma = f(\varepsilon)$ dotyczącą materiału o właściwościach sprężysto-plastycznych z umocnieniem dla jednoosiowego stanu naprężenia \rightarrow



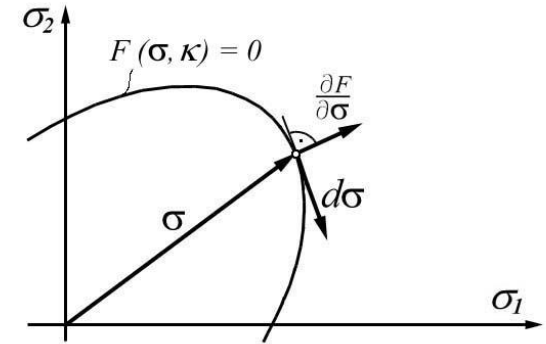
Odształcenie całkowite ε :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p.$$

Poza zakresem sprężystym przyrost odkształceń plastycznych $d\varepsilon_p$ wyznacza się np. z prawa płynięcia jako iloczyn skalarnego mnożnika $d\lambda$ i pochodnej potencjału plastycznego Q względem wektora składowych stanu naprężenia:

$$d\varepsilon_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}.$$

Jeśli potencjał Q zastąpi się funkcją plastyczności $F(\sigma, \kappa)$, zależność przyjmie postać stowarzyszonego prawa płynięcia (z odpowiednim warunkiem plastyczności). Współczynnik κ oznacza pracę plastyczną zsumowaną dla całej historii obciążenia, związaną z izotropowym umocnieniem materiału. Korzystając z hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego warunek plastyczności zapisuje się w postaci:



$$F = \sigma_{redHMH} - R_e(\kappa) = 0,$$

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)} - R_e(\kappa) = 0.$$

Po przekształceniach mamy:

$$d\sigma = \mathbf{D}(d\varepsilon - d\varepsilon_p) = \left\{ \mathbf{D} - \mathbf{D} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma^T} \mathbf{D} \left(E_u + \frac{\partial F}{\partial \sigma^T} \mathbf{D} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^{-1} \right\} d\varepsilon = \mathbf{D}^* d\varepsilon.$$

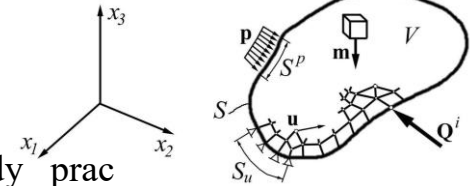
przyrost naprężenia

macierz sprężysto-plastyczna

Jeśli w ustroju nie występują odkształcenia plastyczne macierz \mathbf{D}^* jest równa macierzy konstytutywnej \mathbf{D}

Zasada prac przygotowanych

Równania równowagi ciała przedstawionego na rysunku można uzyskać z zasady prac przygotowanych, pamiętając, że praca przygotowana reakcji sztywnych więzów jest równa zero:



$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{S_p} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} dV - \sum_{i=1}^m \mathbf{Q}^i \delta \mathbf{u}_i - \int_V \mathbf{m}^T \delta \mathbf{u} dV = 0$$

Siły masowe \mathbf{m} wyznacza się z iloczynu gęstości i przyspieszeń $\ddot{\mathbf{u}}(t)$: $\mathbf{m} = -\rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}}$.

Uogólnione przemieszczenie przygotowane $\delta \mathbf{u}$ wyznacza się jako iloczyn macierzy funkcji kształtu i przemieszczenia przygotowanego parametrów węzłowych: $\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{q}$.

Przemieszczenia przygotowane odkształceń $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ wyznacza się wykorzystując liniowość macierzy \mathbf{B}_1 względem wektorów \mathbf{q} i $\delta \mathbf{q}$:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_0 \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_1(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_1(\delta \mathbf{q}) \mathbf{q} = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{q})) \delta \mathbf{q}.$$

Korzystając z powyższych zależności oraz przemienności iloczynu skalarnego wektorów zasadę prac przygotowanych da się przedstawić w następujący sposób:

$$\int_V \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_1^T) \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_p} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV - \sum_{i=1}^m \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}_i^T \mathbf{Q}^i + \int_V \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} dV = 0.$$

Zapisując powyższe równanie po umieszczeniu wariacji $\delta \mathbf{q}$ przed znakami całek i sumy otrzymamy:

$$\delta \mathbf{q}^T \left(\int_V (\mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_1^T) \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_p} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV - \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i^T \mathbf{Q}^i + \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} dV \right) = 0,$$

Ponieważ przemieszczenia przygotowane $\delta \mathbf{q}$ są dowolne i różne od zera, spełnienie tego równania wymaga zerowania się wyrażenia w nawiasie.

Grupując poszczególne wyrazy w **wektor sił wewnętrznych** $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ i **wektor obciążeń zewnętrznych** \mathbf{R}^0 niezależny od parametrów węzłowych, uzyskuje się następujący układ równań nieliniowych:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{R}^0 = \mathbf{0}, \quad (*)$$

w którym:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \int_V (\mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_1^T) \boldsymbol{\sigma} dV,$$

$$\mathbf{R}^0 = \int_{Sp} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV + \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i^T \mathbf{Q}^i - \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} dV.$$

W zagadnieniach dynamicznych z tłumieniem zależność powyższą uzupełnia się o macierz tłumienia \mathbf{C} , proporcjonalną do prędkości $d\mathbf{q}/dt$. Pełne równanie ruchu ciała przyjmuje wtedy następującą postać:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{P}(t), \quad (**)$$

w którym: $\mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{q})$, $\mathbf{P}(t) = \int_{Sp} \mathbf{N}^T \mathbf{p}(t) dV + \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i^T \mathbf{Q}^i(t)$, $\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV$.

Macierz \mathbf{M} jest macierzą masową, wektor $\mathbf{P}(t)$ zawiera obciążenia zależne od czasu, natomiast $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ jest nieliniową macierzą sztywności, zależną od przemieszczeń węzłowych.

Układ równań (*) rozwiązuje się metodami iteracyjnymi, np. **metodą Newtona-Raphsona**, która polega na linearyzacji przyrostu wektora \mathbf{R} wokół położenia $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, uzyskiwanej przez rozwinięcie wyrażenia (*) w szereg Taylora, z wyrazem zawierającym pierwszą pochodną:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}$$

Pochodna wektora \mathbf{R} względem wektora \mathbf{q} oznaczana jest często jako **macierz styczna** \mathbf{K}_T . Przy różniczkowaniu należy uwzględnić wzór $\mathbf{D}^* = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_1^T, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{D}^* \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Po uwzględnieniu powyższych związków **macierz styczna** \mathbf{K}_T może być przedstawiona jako suma trzech macierzy:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \int_V \frac{\partial (\mathbf{B}_0^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{q}} dV + \int_V \frac{\partial (\mathbf{B}_1^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{q}} dV = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_L, \quad (***)$$

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \int_V \frac{\partial(\mathbf{B}_0^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{q}} dV + \int_V \frac{\partial(\mathbf{B}_1^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{q}} dV = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_L, \quad (***)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_0^T dV - \text{początkowa macierz sztywności},$$

$$\mathbf{K}_G = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,1}^T & \mathbf{N}_{,2}^T & \mathbf{N}_{,3}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{,1} \\ \mathbf{N}_{,2} \\ \mathbf{N}_{,3} \end{Bmatrix} dV$$

– geometryczna macierz sztywności (wynikająca ze stanu naprężenia),

$$\mathbf{K}_L = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_1^T dV + \int_V \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_0^T dV + \int_V \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_1^T dV - \text{macierz dużych przemieszczeń}.$$

Dla liniowej statyki, przy małych przemieszczeniach i wyeliminowaniu członów zależnych od czasu otrzymujemy następującą postać:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad \text{gdzie: } \mathbf{P} - \text{wektor stałych obciążeń zewnętrznych}.$$

W przypadku nieliniowej statyki, związanej z uwzględnieniem dużych przemieszczeń oraz wpływu naprężeń na sztywność ciała, układ równań (***) przyjmuje postać, w której macierz sztywności zależy od parametrów węzłowych:

$$\mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_L, \quad \text{gdzie: } \mathbf{K}_T - \text{macierz styczna, otrzymywana z zależności (***)}.$$

Metoda iteracyjna Newtona-Raphsona

Rozwiązanie układu równań nieliniowych w postaci (*) metodą Newtona-Raphsona polega na wielokrotnym rozwiązaniu zadania liniowego uzyskanego po linearyzacji wektora obciążeń wewnętrznych $\mathbf{R}(\mathbf{q})$.

W położeniu wyjściowym znany jest wektor \mathbf{q}_0 oraz wektor obciążeń zewnętrznych \mathbf{R}^0 . W pierwszej iteracji indeks $i = 0$.

Przebieg dojścia do rozwiązania jest następujący:

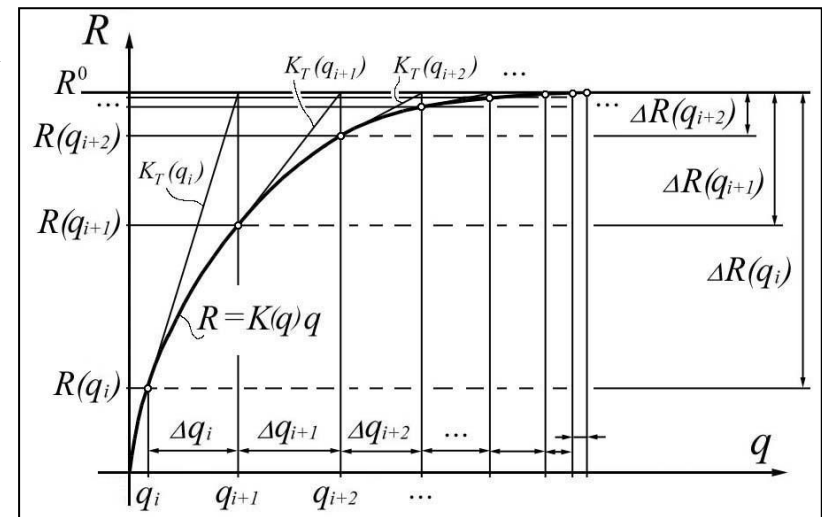
1. Wyznaczenie wektora $\mathbf{R}(\mathbf{q}_i)$,
2. Wyznaczenie wektora residuum: $\Delta\mathbf{R}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{R}^0 - \mathbf{R}(\mathbf{q}_i)$,
3. Wyznaczenie macierzy stycznej $\mathbf{K}_T(\mathbf{q}_i)$,
4. Wyznaczenia odwróconej macierzy stycznej $[\mathbf{K}_T(\mathbf{q}_i)]^{-1}$,
5. Znalazienie przyrostu: $\Delta\mathbf{q}_i = [\mathbf{K}_T(\mathbf{q}_i)]^{-1} \Delta\mathbf{R}(\mathbf{q}_i)$,
6. Wyznaczenie wektora parametrów węzłowych: $\Delta\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta\mathbf{q}_i$,
7. Wyznaczenie normy (zwykle euklidesowej) wektorów $\Delta\mathbf{q}_i$ i $\Delta\mathbf{R}(\mathbf{q}_i)$,
8. Sprawdzenie kryterium zbieżności,
9. Zwiększenie indeksu: $i = i + 1$ i powtórzenie kroków od 1 do 9.

Iteracje są wykonywane dotąd, aż zostaną spełnione kryteria zbieżności:

- a) przemieszczeniowe $\|\Delta\mathbf{q}_i\|_2 < \varepsilon_q \|\mathbf{q}_{ref}\|_2$
- b) siłowe $\|\Delta\mathbf{R}(\mathbf{q}_i)\|_2 < \varepsilon_R \|\mathbf{R}_{ref}\|_2$

Wielkości ε_q i ε_R są tolerancjami, które z reguły przyjmuje się na poziomie około 0,1% wartości norm wektorów odniesienia \mathbf{q}_{ref} i \mathbf{R}_{ref} . Wektorem odniesienia w przypadku przemieszczeń jest najczęściej aktualny stan \mathbf{q}_i , natomiast w przypadku kryterium siłowego za wektor odniesienia przyjmuje się wartość obciążenia \mathbf{R}^0 z danego podkroku.

W metodzie elementów skończonych lepszą zbieżność uzyskuje się zwykle dla kryterium przemieszczeniowego.

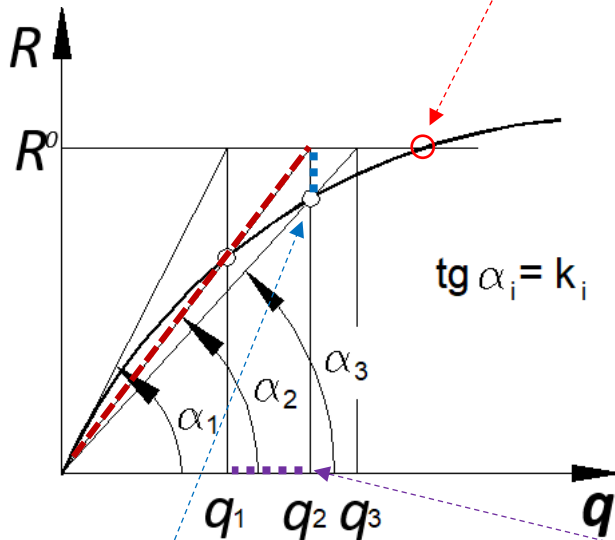


Iteracyjne rozwiązanie układu nieliniowych równań metodą iteracji bezpośrednich

Seria przybliżonych rozwiązań (iteracje): $\{q\}_0, \{q\}_1, \{q\}_2, \dots, \{q\}_n$

zbieżność do **dokładnego rozwiązania**

Wektor $\{q\}_i$ oblicza się na podstawie poprzedniego rozwiązania $\{q\}_{i-1}$



$$[K(\{q\}_{i-1})]\{q\}_i = \{R\}$$

$\{q\}_0$ – dowolne rozwiązanie początkowe ($=0$),

$$[K]_i = [K(\{q\}_i)] \text{ – poprawiona macierz sztywności}$$

Kryteria zbieżności:

Zbieżność przyrostu DOF

$$\{\Delta q\}_i = \{q\}_i - \{q\}_{i-1} \longrightarrow \|\{\Delta q\}_i\| \leq \delta$$

Konwergencja niezrównoważona (wektor resztkowy)

$$\{\Delta R\}_{i+1} = \{R\} - [K]_i \{q\}_i \longrightarrow \|\{\Delta R\}_i\| \leq \varepsilon \quad \delta, \varepsilon \text{ - wartości odniesienia}$$

Normy:
 $\| \{x\} \| = (\sum x_i^2)^{1/2}$
 $\| \{x\} \| = \max x_i$

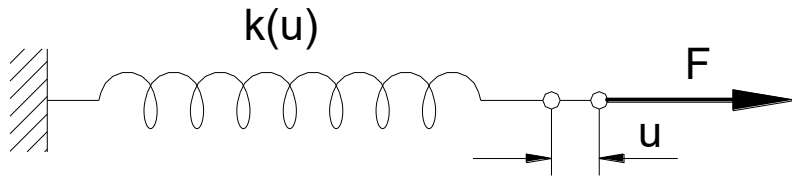
Kryteria dotyczące błędów względnych

$$\frac{\|\{\Delta q\}_i\|}{\|\{q\}_i\|} \leq \varepsilon$$

$$\frac{\|\{\Delta R\}_i\|}{\|\{R\}\|} \leq \delta$$

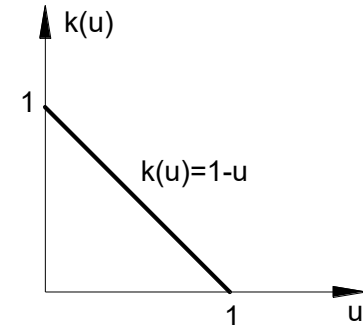
Techniki Iteracyjnego rozwiązania układu nieliniowych równań

Przykład 4: Znajdź przemieszczenie u dla sprężyny nieliniowej



$$k(u) = 1 - u$$

$$F_\alpha = 0.2$$

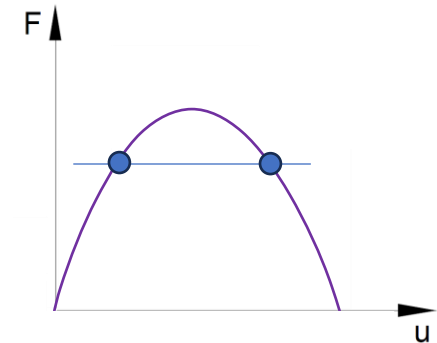


Rozwiązanie analityczne:

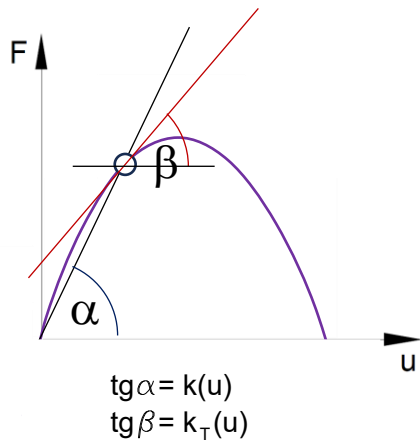
$$k(u)u = F$$

$$u^2 - u + F = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4F}}{2} = 0.2734, \\ u_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4F}}{2} = 0.7236. \end{cases}$$



Rozwiązanie numeryczne:



sztwność styczna:

$$k_T = \frac{dF}{du} = \frac{d}{du}(k(u)u) = \frac{dk}{du}u + k = 1 - 2u$$

Metoda iteracji bezpośrednich

$$\{q\}_i = [K]_{i-1}^{-1}\{F\}$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0$

Iteracja 1: $u_1 = \frac{F_a}{k(u_0)}$

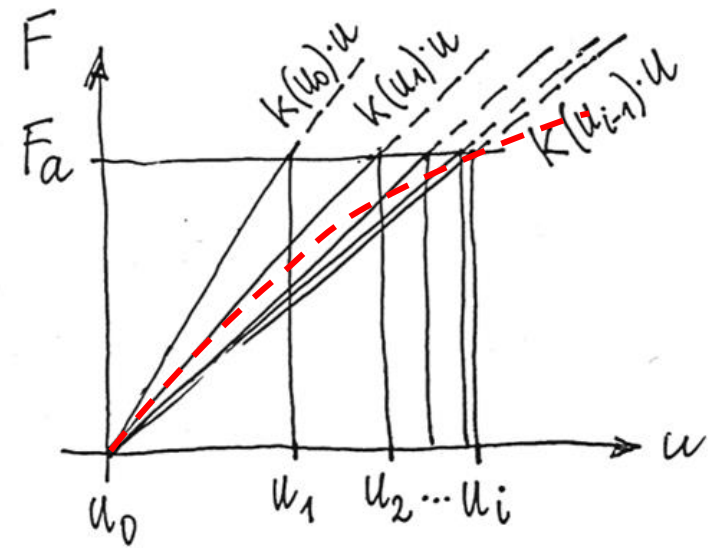
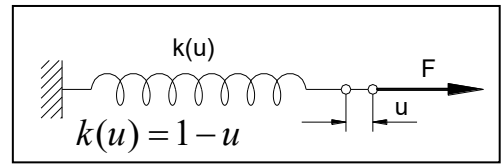
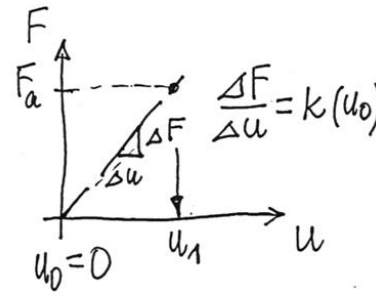
Iteracja „i”: $u_i = \frac{F_a}{k(u_{i-1})}$

Przyrost przemieszczenia:

$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$$

Kryterium zbieżności:

$$\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon$$



i	$u_i = \frac{F_a}{k(u_{i-1})}$	$k_i = 1 - u_i$	$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$
1	$0.2/1 = \mathbf{0.2}$	$1-0.2 = \mathbf{0.8}$	$0.2-0 = \mathbf{0.2}$	$\mathbf{1}$
2	$0.2/0.8 = \mathbf{0.25}$	$1-0.25 = \mathbf{0.75}$	$0.25-0.2 = \mathbf{0.05}$	$\mathbf{0.25}$
3	$0.2/0.75 = \mathbf{0.2667}$	$1-0.2667 = \mathbf{0.7333}$	$0.2667-0.25 = \mathbf{0.017}$	$\mathbf{0.064}$
4	$0.2/0.7333 = \mathbf{0.2727}$	$1-0.2727 = \mathbf{0.7273}$	$0.2727-0.2666 = \mathbf{0.006}$	$\mathbf{0.022}$
5	$0.2/0.7273 = \mathbf{0.2750}$	$1-0.275 = \mathbf{0.725}$	$0.275-0.2727 = \mathbf{0.0023}$	$\mathbf{0.0084}$
6	$0.2/0.725 = \mathbf{0.2759}$	$1-0.2759 = \mathbf{0.7241}$	$0.2759-0.275 = \mathbf{0.0009}$	$\mathbf{0.0032}$

Metoda przyrostowa

Obliczenia dotyczą przyrostów wektora niewiadomych $\{q\}_i$

$$\{R\}_i = \{F\} - [K]_{i-1}\{q\}_{i-1}$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1:

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0) \cdot u_0 = F_a$

przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k(u_0)}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

Iteracja „i”:

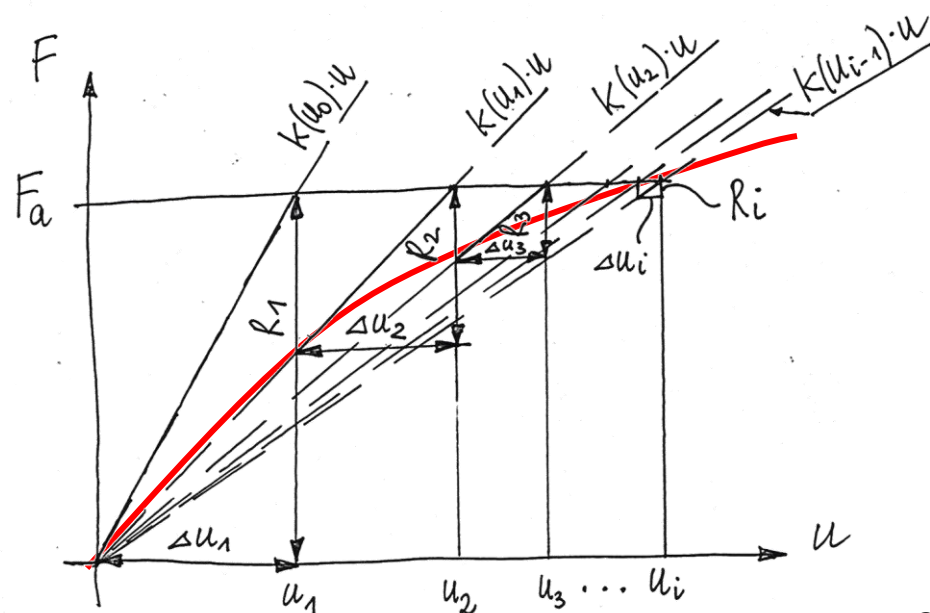
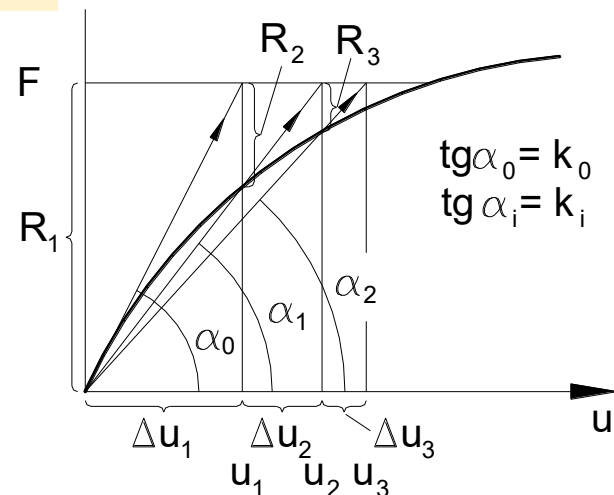
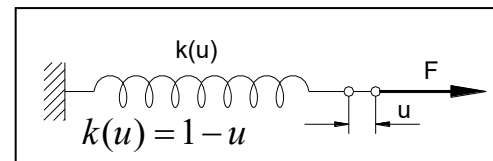
$$R_i = F_a - k(u_{i-1}) \cdot u_{i-1}$$

$$\Delta u_i = \frac{R_i}{k(u_{i-1})}$$

$$u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$$

Kryteria zbieżności:

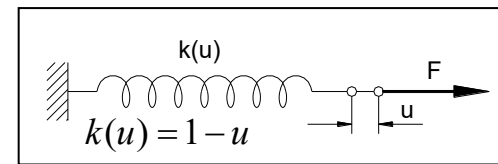
$$\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$$



Metoda przyrostowa

Obliczenia dotyczą przyrostów wektora niewiadomych $\{q\}_i$

$$\{R\}_i = \{F\} - [K]_{i-1}\{q\}_{i-1}$$



Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1:

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0) \cdot u_0 = F_a$

przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k(u_0)}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

Iteracja „i”:

$$R_i = F_a - k(u_{i-1}) \cdot u_{i-1}$$

$$\Delta u_i = \frac{R_i}{k(u_{i-1})}$$

$$u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$$

i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = \frac{R_i}{k_{i-1}}$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.05	0.25	0.2	0.2
3	0.25	0.75	0.0125	0.0167	0.2667	0.063	0.063
4	0.2667	0.733	0.0044	0.006	0.2727	0.022	0.022
5	0.2727	0.7273	0.0017	0.0023	0.2750	0.008	0.0085

Kryteria zbieżności:

$$\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$$

Metoda Newtona-Raphsona

W każdej iteracji w obliczeniach liniowego układu równań używana jest macierz styczna

$$[K]_T = \frac{d\{F\}}{d\{q\}} = [K] + \frac{d[K]}{d\{q\}}\{q\}$$

Sztywność styczna:

$$k_T = \frac{dF}{du} = \frac{d(k(u)) \cdot u}{du} = \frac{d(k(u))}{du} \cdot u + \frac{du}{du} \cdot k(u) = -u + 1 - u = 1 - 2 \cdot u$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1: $k_{T1} = \left. \frac{dF}{du} \right|_{u_0} = 1 - 2 \cdot u_0$

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0) \cdot u_0 = F_a$

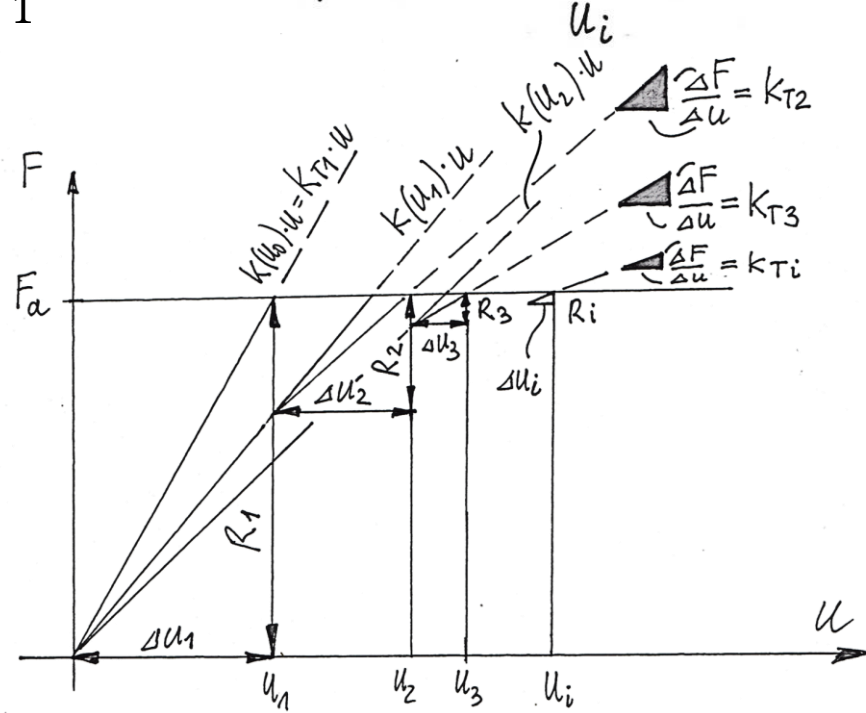
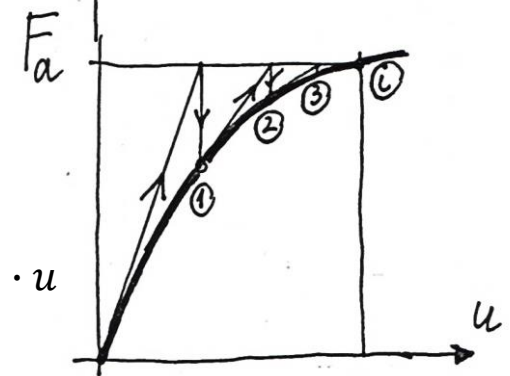
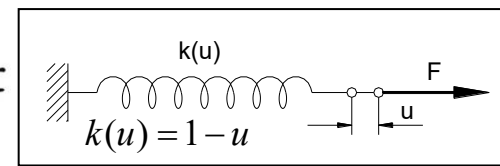
przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k_{T1}}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

Iteracja „i”: $k_{Ti} = \left. \frac{dF}{du} \right|_{u_{i-1}} = 1 - 2 \cdot u_{i-1}$

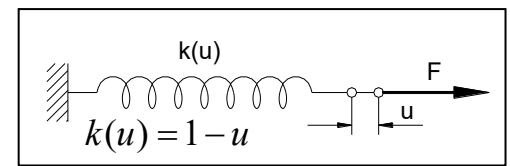
$R_i = F_a - k(u_{i-1}) \cdot u_{i-1}$

$\Delta u_i = \frac{R_i}{k_{Ti}} \quad u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$



Kryteria zbieżności: $\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \epsilon ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$

Metoda Newtona-Raphsona



W każdej iteracji w obliczeniach liniowego układu równań używana jest macierz styczna

$$[K]_T = \frac{d\{F\}}{d\{q\}} = [K] + \frac{d[K]}{d\{q\}}\{q\}$$

Sztywność styczna:

$$k_T = \frac{dF}{du} = \frac{d(k(u)) \cdot u}{du} = \frac{d(k(u))}{du} \cdot u + \frac{du}{du} \cdot k(u) = -u + 1 - u = 1 - 2 \cdot u$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1: $k_{T1} = \left. \frac{dF}{du} \right|_{u_0} = 1 - 2 \cdot u_0$

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0) \cdot u_0 = F_a$

przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k_{T1}}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

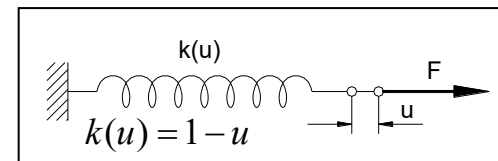
Iteracja „i”: $k_{Ti} = \left. \frac{dF}{du} \right|_{u_{i-1}} = 1 - 2 \cdot u_{i-1}$

$R_i = F_a - k(u_{i-1}) \cdot u_{i-1}$

$\Delta u_i = \frac{R_i}{k_{Ti}} \quad u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$

Kryteria zbieżności: $\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$

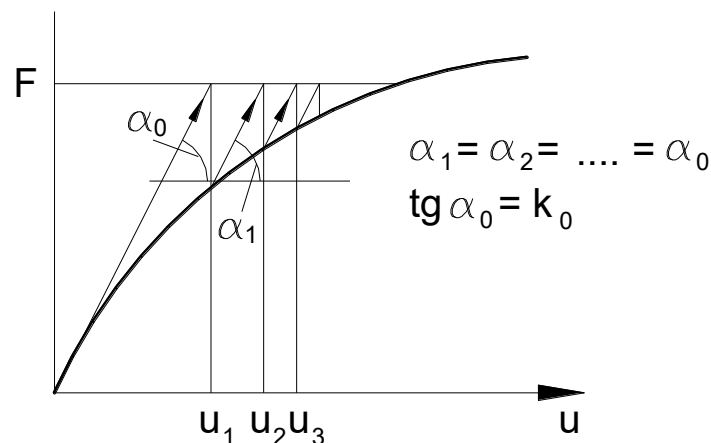
i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1} u_{i-1}$	$k_{Ti} = 1 - 2u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_{Ti}$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	1	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.6	0.0667	0.2667	0.250	0.2
3	0.2667	0.7333	0.0044	0.466	0.0095	0.2762	0.048	0.034
4	0.2762	0.7238	0.0001	0.448	0.0002	0.2764	0.001	0.0005



Zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona

W każdej iteracji używany jest ten sam zestaw równań (ta sama macierz początkowa)

$$[K_0]^{-1} \text{ zamiast } [K]_{i-1}^{-1}$$

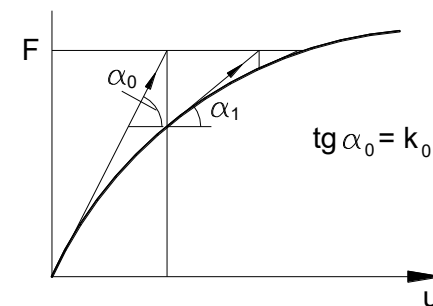
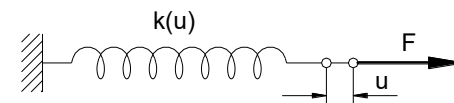


$$\text{Kryteria zbieżności: } \frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$$

i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_0$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.04	0.24	0.167	0.2
3	0.24	0.76	0.0176	0.0176	0.2576	0.068	0.088
4	0.2576	0.7424	0.0087	0.00876	0.2664	0.033	0.044
5	0.2664	0.7336	0.0046	0.0046	0.2710	0.017	0.023
6	0.2710	0.729	0.0024	0.0024	0.2734	0.009	0.012

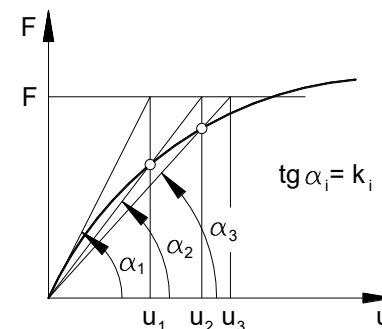
Metoda Newtona-Raphsona

i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$k_T = 1 - 2u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_T$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	1	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.6	0.0667	0.2667	0.250	0.2
3	0.2667	0.7333	0.0044	0.466	0.0095	0.2762	0.048	0.034
4	0.2762	0.7238	0.0001	0.448	0.0002	0.2764	0.001	0.0005



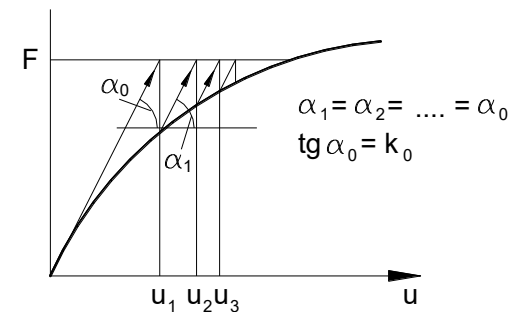
Procedura iteracji bezpośredniej (podejście przyrostowe)

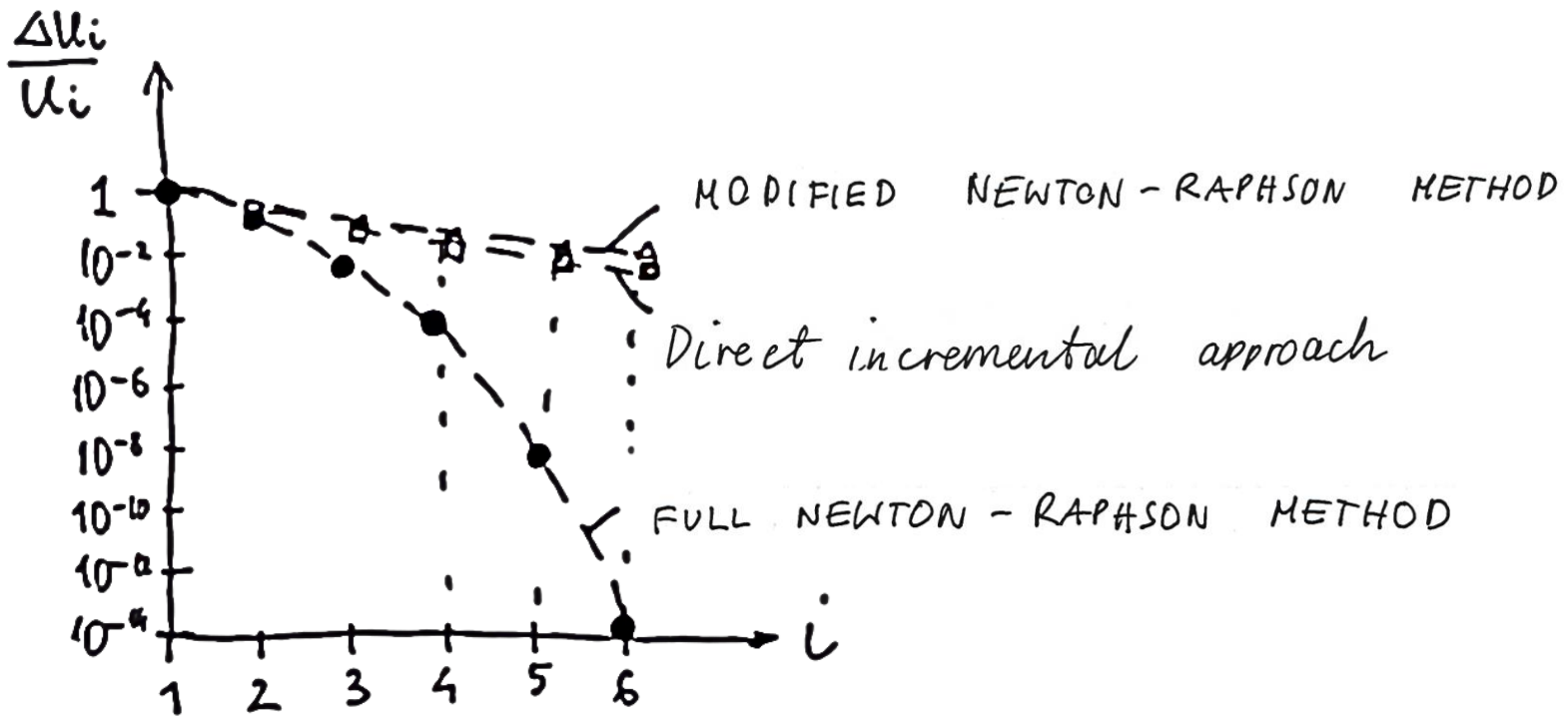
i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_{i-1}$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.05	0.25	0.2	0.2
3	0.25	0.75	0.0125	0.0167	0.2667	0.063	0.063
4	0.2667	0.733	0.0044	0.006	0.2727	0.022	0.022
5	0.2727	0.7273	0.0017	0.0023	0.2750	0.008	0.0085



Zmodyfikowana procedura Newtona-Raphsona

i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_0$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.04	0.24	0.167	0.2
3	0.24	0.76	0.0176	0.0176	0.2576	0.068	0.088
4	0.2576	0.7424	0.0087	0.00876	0.2664	0.033	0.044
5	0.2664	0.7336	0.0046	0.0046	0.2710	0.017	0.023
6	0.2710	0.729	0.0024	0.0024	0.2734	0.009	0.012

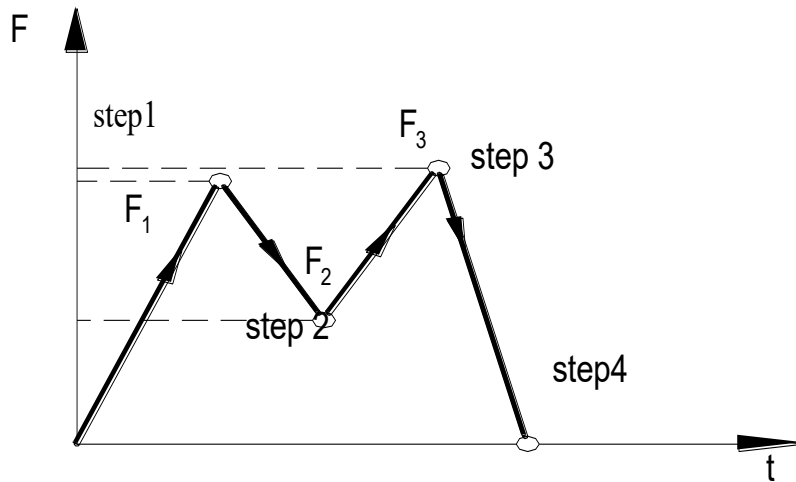
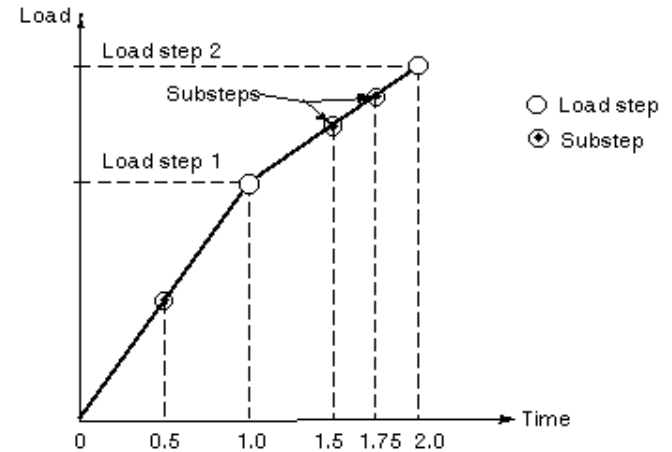




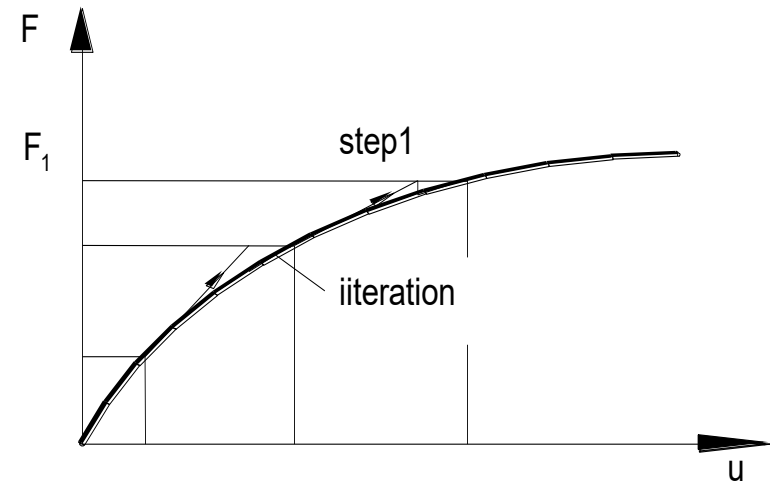
Iteracyjne obliczenia nieliniowe w praktyce

Użytkownik wykonuje nieliniową analizę statyczną, dzieląc obciążenie na szereg kroków przyrostowych obciążenia i w każdym kroku wykonując kolejne przybliżenia liniowe w celu uzyskania równowagi. Każde przybliżenie liniowe wymaga jednego przejścia przez solver równań (*iteracja równowagi*).

Load steps, substeps, and "time"

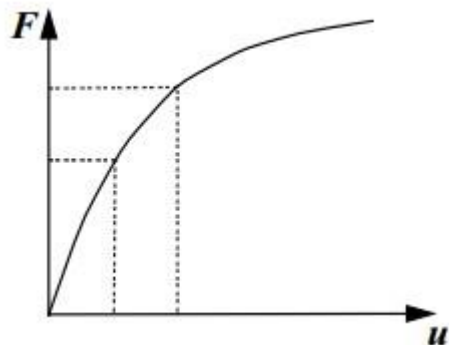


substep 3
substep 2
substep 1



Nieliniowości geometryczne

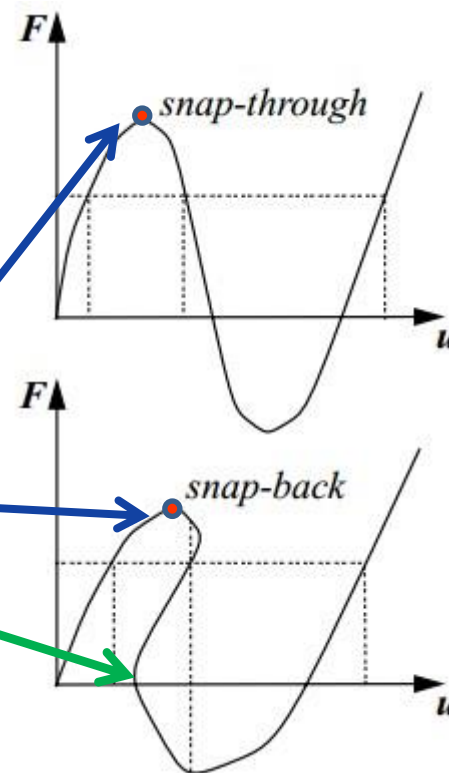
Nieliniowość – charakterystyka miękknąca



Silne nieliniowości ścieżki równowagi

punkty krytyczne

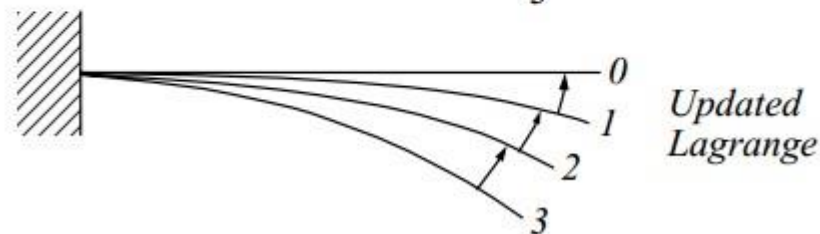
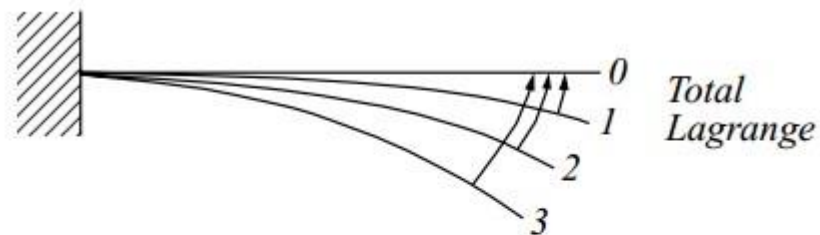
punkty zwrotne



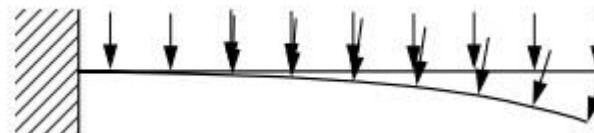
Nieliniowości geometryczne

TL – Total Lagrange
(stacjonarny opis Lagrange'a)

UL – Updated Lagrange
(uaktualniony opis Lagrange'a)



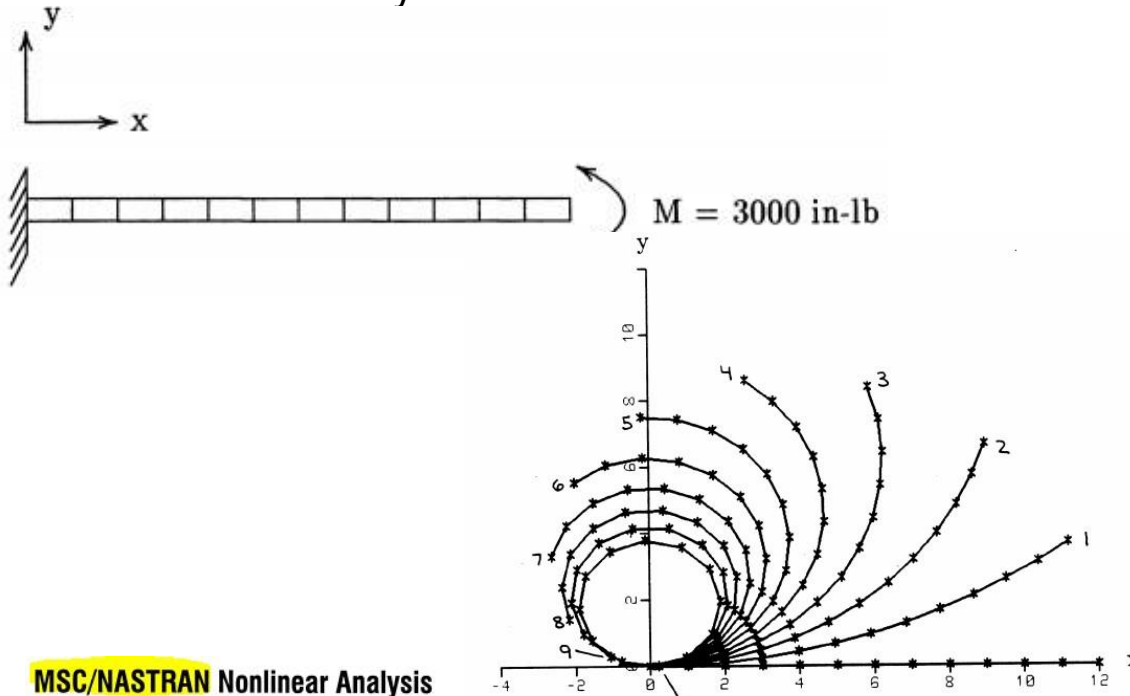
Siły śledzące – (np. ciśnienie)



Nieliniowości geometryczne

Nieliniowości geometryczne w MES – test NAFEMS NL5 Elementy belkowe

materiał sprężysty,
duże przemieszczenia
duże obroty



MSC/NASTRAN Nonlinear Analysis

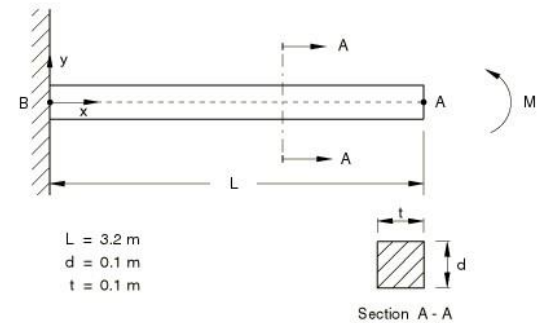
4.6.5 NL5: Straight cantilever with end moment

Product: Abaqus/Standard

Element tested

B22

Problem description



inc	moment (in-lb)	θ_{end}
1	300	36.7°
2	600	73.3°
3	900	110.0°
4	1200	146.7°
5	1500	183.3°
6	1800	220.0°
7	2100	256.6°
8	2400	293.3°
9	2700	330.0°
10	3000	366.6°